Prof. Dr. Alfred Toth

Die drei Mathematiken

1. Bekanntlich ist die üblicherweise an den Universitäten gelehrte Mathematik rein quantitativ. Schon ein Schulkind lernt, daß eine Addition wie

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel

„sinnvoll“, eine Addition wie

1 Apfel + 1 Birne = 2 Früchte

„fragwürdig“ und eine Addition wie

1 Apfel + 1 Kirche = ?

„unsinnig“ ist, d.h. in der traditionellen Mathematik wird, wie es Hegel ausgedrückt hatte, von allen Qualitäten außer der einen Qualität der Quantität abstrahiert.

2. Hingegen ist es in der von Gotthard Günther, Engelbert Kronthaler und Rudolf Kaehr begründeten „Mathematik der Qualitäten“ möglich, Objekte über ihre „Kontexturengrenzen“ hinweg mit Hilfe von kontexturierten Zahlen einerseits und mit Hilfe von Transoperatoren andererseits, welche zwischen verschiedenen Kontexturen vermitteln, d.h. auch qualitativ geschiedene, Objekte zu addieren. Voraussetzung dafür ist nach Günther die Iterierbarkeit der Subjektposition der der quantitativen Mathematik zugrunde liegenden aristotelischen logischen Relation

$L = (0, 1)$.

In dieser auch als polykontexturalen bezeichneten Mathematik gilt also

$\Omega = \text{const.}$

$\Sigma \neq \text{const.}$,

während in der quantitativen Mathematik, da es ja gar keine an Subjekte gekoppelten Qualitäten gibt, natürlich nur das erste der beiden obigen Konstanzgesetze gilt.

3. Obwohl der „Ort“ einer Zahl nicht nur in der polykontexturalen Mathematik - wo er durch die Länge eines Morphogramms, d.h. einer Kenogrammsequenz,

definiert ist, sondern auch in der quantitativen Mathematik eine Rolle spielt – so gilt etwa $10 \neq 01$ –, gibt es weder in der ersteren noch in der letzteren Mathematik einen Ort der gezählten Qualität, und diese ist ja immer ein Objekt. Es ist das Verdienst der von uns begründeten ortsfunktionalen Arithmetik, die „Verortung“ der Qualität nicht einfach durch Iteration der Subjektposition, sondern durch

$$\Omega = f(\omega)$$

eingeführt zu haben. Diese Gleichung besagt zunächst nichts weiter, als daß jedes Objekt und damit jede Qualität einen Ort haben muß. Dieser Ort kann zwar wechseln – man kann etwa ein Trinkglas an einer sehr großen Menge von Orten abstellen –, aber er inhäriert dem Objekt und damit der Qualität. Deshalb wurde in Toth (2018a, b) das sog. ©-Zahlenfeld eingeführt. Dieses ist das abstrakteste Zahlenfeld, das allen drei ortsfunktionalen Zählweisen zugrunde liegt, d.h. es ist neutral gegenüber adjazenter, subjazenter, transjazenter oder aus ihnen kombinierten Zählweisen.

$$Z_{\copyright,\times} = \left(\begin{array}{cccccc} & \copyright_i & \copyright_j & & \copyright_j & \copyright_i \\ & \copyright_i & \copyright_j & & \copyright_j & \copyright_i \\ \times, & & & \times & & \\ & \copyright_i & \copyright_j & & \copyright_j & \copyright_i \\ & \copyright_i & \copyright_j & & \copyright_j & \copyright_i \end{array}\right)$$

d.h. $Z_{\copyright,\times}$ ist gleich zwei Hälften aus je einer der beiden reflektierten Hälften des gesamten ©-Zahlenfeldes zuzüglich dem Dualisationsoperator. Da die ©-Positionen mit allen drei raumsemiotischen Kategorien, die Bense eingeführt hatte, d.h. mit Systemen, Abbildungen und Repertoires (vgl. Bense/Walther 1973, S. 80) belegt werden können, ist $Z_{\copyright,\times}$ universell, d.h. semiotisch und vermöge semiotisch-ontischer Isomorphie auch ontisch invariant.

Ferner kann man $Z_{\copyright,\times}$ noch weiter vereinfachen, und zwar deshalb, weil der Dualisator im ©-Zahlenfeld sowohl dual, als auch chiastisch fungiert. Da $Z_{\copyright,\times}$ nur ein Symbol, ©, die Perspektivitätsindizes i und j sowie den Operator × enthält, können wir $Z_{\copyright,\times}$ aus einer wie folgt zu definierenden Algebra erzeugen

$$\mathfrak{Z} = (\copyright, i, j, \times).$$

Aus $\mathfrak{Z}$ kann man nun alle drei qualitativen, d.h. sowohl ortsfunktionalen als auch subjektperspektivischen, Zählweisen generieren.

Setzt man

© = adjazent

vermöge

R(adj) = (x_m, y_n) mit $x \neq y$ und $m = n$,

so erhält man durch $\mathfrak{Z}$ das

adjazente Zahlenfeld

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
X_i & Y_j & & & Y_i & X_j & & & Y_j & X_i & & & X_j & Y_i \\
Ø_i & Ø_j & & & Ø_i & Ø_j & & & Ø_j & Ø_i & & & Ø_j & Ø_i \\
 & & \times & & & & \times & & & & \times & & & \\
Ø_i & Ø_j & & & Ø_i & Ø_j & & & Ø_j & Ø_i & & & Ø_j & Ø_i \\
X_i & Y_j & & & Y_i & X_j & & & Y_j & X_i & & & X_j & Y_i.
\end{array}
$$

Setzt man

© = subjazent

vermöge

R(subj) = (x_m, y_n) mit $x = y$ und $m \neq n$,

so erhält man durch $\mathfrak{Z}$ das

subjazente Zahlenfeld

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
X_i & Ø_j & & & Ø_i & X_j & & & Ø_j & X_i & & & X_j & Ø_i \\
Y_i & Ø_j & & & Ø_i & Y_j & & & Ø_j & Y_i & & & Y_j & Ø_i \\
 & & \times & & & & \times & & & & \times & & & \\
Y_i & Ø_j & & & Ø_i & Y_j & & & Ø_j & Y_i & & & Y_j & Ø_i \\
X_i & Ø_j & & & Ø_i & X_j & & & Ø_j & X_i & & & X_j & Ø_i.
\end{array}
$$

Setzt man

© = transjazent

vermöge

R(transj) = (x_n, y_m) mit $x \neq y$ und $m \neq n$,

so erhält man durch $\mathfrak{Z}$ das

transjazente Zahlenfeld

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
X_i & Ø_j & & Ø_i & X_j & & Ø_j & X_i & & X_j & Ø_i \\
Ø_i & Y_j & & Y_i & Ø_j & & Y_j & Ø_i & & Ø_j & Y_i \\
 & & \times & & & \times & & & \times & & \\
Ø_i & Y_j & & Y_i & Ø_j & & Y_j & Ø_i & & Ø_j & Y_i \\
X_i & Ø_j & & Ø_i & X_j & & Ø_j & X_i & & X_j & Ø_i.
\end{array}
$$

Wenn wir also zusammenfassen und gleichzeitig ergänzen dürfen, so gelten die folgenden drei Konstanzgesetze und Ungleichungen für die quantitative, die polykontexturale und die qualitative Mathematik.

Für die quantitative Mathematik gilt

$\Omega = \text{const.}$

Für die polykontexturale Mathematik gilt

$\Omega = \text{const.}$

$\Sigma \neq \text{const.}$

Für die qualitative Mathematik gilt hingegen

$\Omega = \text{const.}$

$\Sigma \neq \text{const.}$

$\text{adj}(\Omega) \neq \text{subj}(\Omega) \neq \text{transj}(\Omega)$.

In anderen Worten, die qualitative Algebra

$\mathfrak{Z}$ = (©, i, j, ×)

besteht aus den drei „Entitäten“ Ω, Σ und © ∈ (Ø, X, Y). Im Gegensatz zur quantitativen Mathematik, die lediglich auf Ω basiert und der polykontexturalen

Mathematik, die sowohl auf Ω als auch auf Σ basiert, basiert also die qualitative Mathematik zugleich auf der Ortsfunktionalität ©. Wir haben damit also drei gegenwärtig bestehende Mathematiken, die in der folgenden hierarchischen Relation zueinander stehen

quantitative Mathematik	Ω
∩	
polykontexturale Mathematik	Ω, Σ
∩	
qualitative Mathematik	Ω, Σ, © ∈ (Ø, X, Y).

Die quantitative Mathematik ist daher nicht nur eine (qualitative) Teilrelation der polykontexturale Mathematik – in der Terminologie der letzteren: ein morphogrammatisches Fragment –, sondern auch der polykontexturalen Mathematik, denn der kapitale Fehler der letzteren ist die auf Günther zurückgehende Zuschreibung der Qualitäten zur (iterierbaren) Subjektposition einer (dadurch nicht mehr aristotelischen) Logik. Wie die qualitative Mathematik bzw. die ihr zugrunde liegende „quadralektische" Logik (R. Kaehr) gezeigt hat (vgl. Toth 2015), ist es jedoch nicht nötig, die aristotelische Logik und mit ihr die drei Grundgesetze des Denkens zu verlassen, um Qualitäten in die Mathematik zu bringen. Sie werden dann allerdings nicht als den Subjekten inhärent vorausgesetzt (während das Objekt in der polykontexturalen wie in der aristotelischen Logik mit den Worten Hegels weiterhin „totes Objekt" bleibt), sondern die Qualität wird als Ortsfunktionalität des Objektes definiert. Das Subjekt kann ja höchstens Qualitäten erzeugen, aber sie inhärieren ihm nicht. Hingegen ist das Objekt per definitionem Qualität, und jedes Objekt hat einen Ort, und daraus folgt wiederum, daß Qualität verortet ist.

Während also Qualitäten vermöge ihres Ortes qualitativ sind, ist die Qualität, welche Subjekte nicht a priori besitzen, sie aber, wie gesagt, erzeugen können, in der Algebra $\mathfrak{Z}$ durch die Perspektivierungsindizes verankert. Der Grund in dieser ungleichen Behandlung des Ortes eines Objektes und des Ortes eines Subjektes liegt darin, daß der Standort eines Subjektes ohne jeglichen Einfluß auf die Qualität eines Objektes ist. So verändert sich etwa ein Haus, eine Straße oder ein Platz in keiner Weise, ob er oder sie durch ein Subjekt von links nach rechts, von rechts nach links, von oben nach unten, von unten nach oben oder in einer der beiden Richtungen der beiden Diagonalen wahrgenommen wird.

Literatur

Bense, Max/Walther, Elisabeth (Hrsg.), Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2015

Toth, Alfred, Qualitative Mathematik der 4-Seitigikeit ontischer Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2018a

Toth, Alfred, Das ©-Zahlenfeld. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2018b

11.8.2018